Vecteurs et Torseurs

Vecteurs

François Marcy le 31/08/99. MàJ : 25/02/05

Pourquoi

Pour aller d'un point A à un point B, beaucoup de chemins. Mais en fait l'objectif est toujours le même : aller de A à B. Il est certainement différent de faire un trajet de B à A. Cette histoire a un sens que l'on note par une flèche. À la main, c'est facile, il suffit de mettre la flèche au-dessus des lettres accolées : $\overrightarrow{AB}$

Toujours en se déplaçant à la surface de la terre, on peut aller vers le Sud. Ce n'est pas le Nord : c'est l'opposé. Partout, il y a un Sud, sauf au pôle Sud. Il suffit de tendre le bras, vers le Sud, pour dire comment avancer. On pourrait écrire $\vec{x}$, avec x représentant le Sud.

On note de façon très voisine, mais est-ce toujours la même chose ?

En regardant passer un satellite, la nuit dans les étoiles, on a facilement l'idée de ce que peut être la vitesse d'un point : $\vec{V}(A)$

Est-ce encore la même chose ?

Mais un point c'est bien, un objet c'est mieux ! Comment représenter le mouvement d'un objet ? Le vecteur ne suffit pas.

Pour pouvoir déplacer un objet, il faut des actions mécaniques. Mais qu'est ce qu'une action mécanique ? Comment la percevoir ? Comment en parler ? Comment raisonner, comparer, expliquer ? En somme, comment la représenter ?

La tension dans un fil est une première idée. On peut donc tirer l'objet avec un fil. Voilà une "force pure". On peut toucher le fil pour sentir s'il est plus ou moins tendu. Le fil est attaché à l'objet en un point. On ne peut que tirer : $\vec{F}$

Est-ce encore la même chose ?

Alors la tentation est grande de donner le nom du point à la force. Mais que se passe-t-il lorsque deux fils sont attachés au même point ? Autant désigner clairement chaque action mécanique par une autre lettre, pour éviter toute confusion.

Mais il n'y a pas que les fils ! Bien d'autres actions mécaniques sont possibles. Certaines peuvent encore être représentées par des vecteurs. Pour d'autres, ce n'est pas possible.

Comment calculer

On dispose de la structure d'espace vectoriel, du produit scalaire, de la norme, du produit vectoriel et du produit mixte. Ce qui permet de définir une base pour utiliser des composantes. Mais un vecteur existe, que la base soit présente ou non.

Deux idées différentes peuvent alors exister : soit un calcul direct, soit en projetant sur une base. Le calcul direct permet les simplifications, alors que la projection systématique sur une base donne des équations qui ne sont pas souvent facilement simplifiables, sauf quand la base est très bien choisie.

Pour raisonner simplement, il faut comprendre et exploiter directement l'entité "vecteur".

Torseur

Pourquoi

Chaque point d'un solide a une vitesse différente. Non ! Si ! Mais le train qui roule sur des rails en ligne droite entre Paris et Blois et qui croise celui… Oui certes, mais on n'est plus au cours élémentaire. Il faut maintenant parler d'orientation de satellite, de mouvement de bras de robots et même de fermeture de portail.

Alors pour traiter ces vitesses, organisées en champ de vecteurs, l'outil c'est le torseur.

En tirant un solide avec un fil, le plus souvent, l'objet commence par tourner. Si ! Voir portail par exemple. Il faut alors s'occuper du moment de la force. À ne pas confondre avec instant… Ce moment est différent en chaque point. C'est aussi un vecteur.

Là aussi, ce champ de vecteurs, c'est un torseur.

Le même ?

Comment représenter

Alors c'est le champ qui intéresse. Comment avoir la valeur du champ en un point ? Pour simplifier (?), on désigne le champ par : moment en un point M : $\vec{M}(M)$

Cette notation est celle d'une fonction de point.

Donc un torseur est un champ de vecteurs. Par commodité, pour éviter de trop longs calculs, on lui associe un vecteur constant qu'historiquement certains appellent somme et d'autres pour éviter les confusions, résultante : $\vec{R}$

Supposons que l'on connaisse la valeur du champ en un point, disons O : $\vec{M}(O)$

On montre alors que le champ en tout point M est obtenu si l'on connaît cette fameuse résultante par :

$$\vec{M}(M) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}$$

On va du point O vers le point M et le déplacement est $\overrightarrow{OM}$. Il est bien sûr hors de question de retourner le produit vectoriel sous prétexte d'un quelconque moyen mnémotechnique.

Donc le champ est connu en tout point si l'on connaît l'ensemble constitué de $\vec{R}$ et de $\vec{M}(O)$. On convient donc de noter avec les accolades de l'ensemble, mais en ordonnant, la résultante la première. On convient également de rappeler le point du champ, avant la notation de l'ensemble, pour éviter tout malentendu lorsque la notation (O) n'est pas explicitement présente dans le champ.

Comment particulariser le fait qu'il s'agisse d'un torseur, sans trop alourdir les représentations ? Une convention simple est d'utiliser une écriture ronde :

$$\mathcal{T} = {}_{O}\begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}(O) \end{cases}$$

On peut même se laisser entraîner et écrire :

$$\mathcal{T} = {}_{O}\begin{cases} \vec{\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}}(O) \end{cases}$$

pour rappeler que les deux vecteurs concourent au torseur.

Cette notation simple est sans ambiguïté, suffisante donc efficace.

Le torseur nul peut être noté 0 sans autre forme de procès.

La propriété fondamentale est bien sûr :

$$\overrightarrow{OM}\ \vec{\mathcal{M}}(M) = \overrightarrow{OM}\ \vec{\mathcal{M}}(O)$$

Comment calculer

On dispose de la structure d'espace vectoriel et du comoment.

Le calcul de fait avec les trois vecteurs : $\vec{\mathcal{R}}$, $\vec{\mathcal{M}}(O)$ et $\overrightarrow{OM}$

Là aussi, on peut utiliser un calcul direct ou projeter systématiquement.

Le calcul direct est très souvent préférable et on peut écrire bien simplement :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 0$$

Un calcul plus effectif se fait en un même point. C'est à ce moment seulement qu'il convient de se poser la question du choix de ce point de calcul.

Comment désigner

Ce qui est important doit se voir. Il faut donc éviter de noter avec trop d'indices.

La barre oblique ou slash en anglais se lit soit 1 sur 2, soit 2 par rapport à 1, selon le contexte.

La virgule dans le champ des moments se lit soit de l'action de 1 sur 2, soit supposé attaché à 2 par rapport à 1, selon le contexte.

Ce qui donne :

Torseur d'action du solide 1 sur 2

$$\mathcal{T}(1/2) = {}_{A}\left\{\begin{array}{l}\vec{\mathcal{R}}(1/2)\\ \vec{\mathcal{M}}(A,1/2)\end{array}\right.$$

Torseur petits déplacements de 2 par rapport à 1

$$\mathcal{d}(2/1) = {}_{A}\left\{\begin{array}{l}\vec{\omega}(2/1)\\ \vec{u}(A,2/1)\end{array}\right.$$

Torseur cinématique de 2 par rapport à 1

$$\mathcal{V}(2/1) = {}_{A}\left\{\begin{array}{l}\vec{\Omega}(2/1)\\ \vec{V}(A,2/1)\end{array}\right.$$

Torseur cinétique de 2 par rapport à 1

$$\mathcal{C}(2/1) = {}_{A}\left\{\begin{array}{l}m\ \vec{V}(G,2/1)\\ \vec{\sigma}(A,2/1)\end{array}\right.$$

Torseur dynamique de 2 par rapport à 1

$$\mathcal{D}(2/1) = {}_{A}\left\{\begin{array}{l}m\ \vec{\Gamma}(G,2/1)\\ \vec{\delta}(A,2/1)\end{array}\right.$$

En cours d'exposé, on peut écrire directement :

$$\mathcal{V}(1/0) = {}_{A}\left\{\begin{array}{l}\dot{\alpha}\ \vec{z}_0\\ 0\end{array}\right.$$

Il faut aussi bien faire attention en posant les inconnues. Les formes peuvent être identiques, mais les valeurs différentes !!

Axe central

L'axe central est une entité importante du torseur. Connaissant le champ en O et cherchant un point N de cet axe central, la seule formule importante est :

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\vec{\mathcal{R}} \wedge \vec{\mathcal{M}}(O)}{\vec{\mathcal{R}}^2} + \lambda\vec{\mathcal{R}} \qquad \lambda \text{ réel}$$

Ce qui n'empêche pas de dire que si le champ est nul en un point, c'est un point de l'axe central, sauf si c’est le torseur nul.